

RESUME

Cette étude décrit la modélisation mathématique des transferts radiatifs en milieu végétal, en focalisant l'attention sur le régime du rayonnement solaire au sein des couverts végétaux homogènes. Le rayonnement solaire est traité en quatre composantes principales: rayonnement primaire et complémentaire, chacune de ces parties étant constituée des composantes directe et diffuse. On a présenté, dans un contexte assez général, les équations différentielles ou les systèmes d'équations différentielles qui gouvernent les différents processus de l'interaction rayonnement-végétation, et des solutions analytiques sont proposées pour les différentes composantes.

INTRODUCTION

Le régime lumineux à l'intérieur d'une végétation résulte d'une série d'interactions entre le rayonnement solaire incident, d'une part, et les composantes structurales de la végétation, notamment les feuilles avec leurs caractéristiques optiques particulières, d'autre part. Dès les premières études dans ce domaine (MONSI & SAEKI, 1953), le rôle particulier lié à la quantité de surfaces foliaires, a été identifié à travers la proposition d'une loi d'atténuation exponentielle du rayonnement en fonction de la densité cumulée de surface végétale.

Dans cette formulation initiale, les aspects géométriques propres aux éléments végétaux et leur disposition relative dans l'espace du couvert par rapport au rayonnement incident, sont incorporés par un coefficient d'atténuation constant, K . La suite naturelle est donc d'explicitier l'expression qui décrit ce coefficient en fonction des divers facteurs qui le modifient.

D'autre part, les caractéristiques optiques des éléments végétaux (réflexion et transmission) imposent le traitement séparé du rayonnement complémentaire, qui est le résultat de l'interaction rayonnement incident - végétation, cela pour tenir en compte de sa description mathématique assez différente par rapport au champ de rayonnement primaire (direct ou diffus).

Ces différents aspects ont été explorés dans les travaux de WIT (1965), CHARTIER (1966), COWAN (1968), BONHOMME & VARLET-GRANCHER (1977), GOUDRIAAN (1977), NILSON (1971), entre autres. Par ailleurs, les auteurs soviétiques ont développé une théorie plus générale de transfert radiatif en milieu végétal, dont l'origine, réside dans l'adaptation de l'équation intégral-différentielle exprimant ces transferts en milieu turbide. Une synthèse de ces études a été présentée par ROSS (1975, 1981). En ce qui concerne les travaux de revue générale dans ce domaine, LEMEUR & BLAD (1974) et MYNENI ET AL (1989) résumant, discutent et font de nouvelles propositions sur l'état actuel de la compréhension et du développement de la modélisation de ces transferts.

L'objectif de ce travail sera la description de la modélisation des divers termes du rayonnement solaire au sein des couverts végétaux, à travers les lois élémentaires traduites par les relations différentielles sus-mentionnées. On privilégie ici les analyses qui débouchent sur les solutions analytiques pour les différentes composantes du rayonnement solaire.

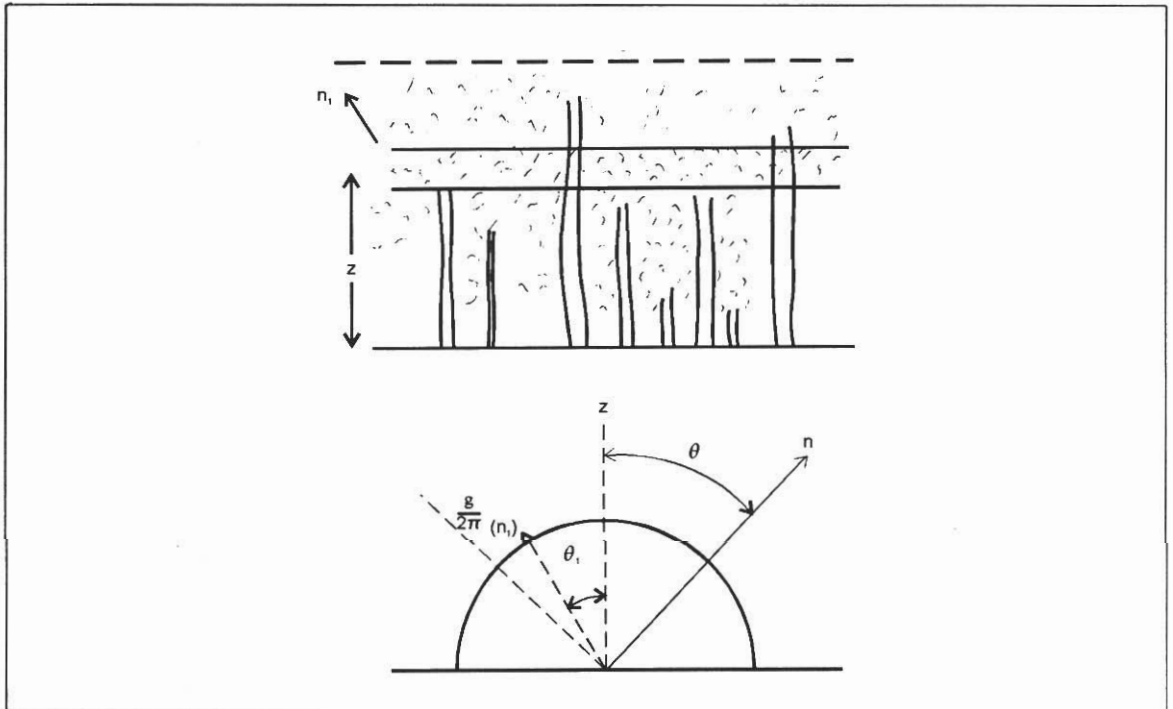
Instituto Nacional de Pesquisas da Amazônia-INPA, Coordenação de Pesquisas em Hidrometeorologia, Caixa Postal 478 - 69011-970 - Manaus, Amazonas, Brasil

Chaire de Bioclimatologia - INRA - France

Modélisation mathématique des transferts radiatifs

La modélisation des transferts radiatifs du milieu végétal peut commencer par la spécification de la fonction qui exprime la disposition relative des éléments végétaux au sein du couvert. Du fait de la complexité naturelle des couverts végétaux, cette caractérisation ne peut être faite que sous une perspective probabiliste de l'ensemble végétatif. Pour répondre à cette approche, quelques fonctions pour représenter la distribution des normales des surfaces végétales ont été proposées dans différents travaux (WIT, 1965; PHILIP, 1965; ROSS & NILSON, 1964; CHARTIER, 1966). Une description plus récente de ce type de fonction a été faite par ROSS (1981), qui apporte des précisions sur le sens probabiliste de telles fonctions. La figure 1 illustre comment ces fonctions sont associées à la disposition réelle des surfaces végétales existantes dans une zone donnée du couvert (couche horizontale, par exemple).

Figure 1 – Définition de la fonction des normales des surfaces, g



L'expression mathématique de la distribution des normales, ainsi définie, est normalisée par l'équation,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} g(\theta_1, \phi_1, z) \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\phi_1 = 1 \quad (01)$$

Dans cette expression, la fonction $g/2\pi$ représente la probabilité que les normales soient orientées selon la direction définie par le vecteur $n_1(\theta_1, \phi_1)$ dans l'hémisphère supérieur d'une surface horizontale de référence, où θ_1 représente l'inclinaison de n_1 par rapport à la verticale, et ϕ_1 l'azimut du vecteur. Cette fonction, sous la forme de l'équation 1, se réfère à l'unité de surface de la zone considérée. Il est intéressant, pour l'étude du régime lumineux, de définir dans quelle proportion de cette unité de surface, les surfaces végétales se projettent sur un plan dont la normale est connue, puisque c'est cette projection qui intercepte les rayons incidents, en déterminant l'atténuation imposée au rayonnement. Cela conduit à la définition de la fonction intégrale $G(z, \theta, \phi)$, ROSS (1981), exprimant la somme des projections des surfaces sur le plan caractérisé par la normale $n(\theta, \phi)$, sous la forme:

$$G(\theta, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} g(\theta_1, \phi_1, z) |\cos n \wedge n_1| \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1 \quad (2)$$

$n \wedge n_1$ → angle entre les vecteurs indiqués

Cette dernière fonction permet finalement que la projection réelle dans chaque direction soit déterminée par le produit $Ga(z)$; ce produit doit être un des facteurs prépondérants dans la définition du régime lumineux à l'intérieur des couverts végétaux.

L'analogie du milieu turbide pour un couvert végétal, suppose des petites surfaces planes, les feuilles (les tiges et les troncs peuvent être considérés, mais leur contribution est assez marginale), agissant comme les éléments qui absorbent, transmettent et réfléchissent le rayonnement incident. L'équation intégral-différentielle qui gouverne ces processus de multiples réflexions et transmissions a été présentée par ROSS (1981), sous la forme suivante, qui est valable pour les végétations homogènes ($\partial I/\partial x = \partial I/\partial y = 0$),

$$\frac{\partial I(n, z)}{\partial z} \cos \gamma = -G(n, z) a(z) I(n, z) + E_M(n, z) + \frac{a(z)}{\pi} \int_{4\pi} \Gamma(n', n) I(n', z) d\Omega' \quad (3)$$

où,

$I \rightarrow I(n, z)$, représente l'intensité du rayonnement incident au niveau z à l'intérieur du couvert et associé à la direction n (Watt/(m²sr))

$n \rightarrow$ vecteur unitaire qui définit la direction n donnée par: $(\cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k)$

$a \rightarrow a(z)$ densité de surface foliaire (m²/m³)

$E_M \rightarrow E_M(n, z)$ émission du milieu végétal (Watt/(m²sr))

$\Gamma(n', n) \rightarrow$ fonction de redistribution du rayonnement réfléchi ou transmis par les surfaces végétales

$\gamma \rightarrow$ angle directeur

$G \rightarrow G(n, z)$ fonction qui caractérise la projection des surfaces végétales sur un plan dont la normale est n rapportée à l'unité de surface

$\Omega' \rightarrow$ angle solide (sr)

L'équation 3 exprime la variation du rayonnement incident suivant la direction n (côté gauche de l'équation) en fonction de la somme des termes suivants (côté droit de l'équation): un premier terme qui représente la réduction du rayonnement initial due à l'existence des surfaces végétales dans la couche d'épaisseur dn ($dn=dz/\cos\gamma$) qui interceptent les rayons incidents; le deuxième terme est associé à l'émission de rayonnement du milieu (dans la région du spectre électromagnétique en question), c'est un terme qui intervient seulement dans l'étude du rayonnement de grande longueur d'onde des surfaces; enfin, la dernière expression représente une augmentation du rayonnement initial résultant de réflexions et transmissions multiples du rayonnement dans le milieu végétal et dépendant à la fois des caractéristiques optiques des surfaces et du propre rayonnement incident.

L'équation 3 est entièrement générale, permettant de résoudre tous les problèmes concernant les transferts radiatifs dans le milieu végétal. On adopte ici cette équation pour l'étude particulière du régime de rayonnement solaire au sein du couvert. La version appropriée dans ce cas est déjà plus simple, puisque le terme d'émission $E_M(n,z)=0$.

Rayonnement Solaire Direct

L'intensité I_s du rayonnement solaire direct est caractérisée par une direction précise, donnée par n_s , qui varie en fonction de la propre évolution du soleil par rapport à la verticale locale. Cette intensité de rayonnement subira une atténuation lorsque les rayons solaires pénétreront dans le couvert, et l'équation particulière qui gouverne cette interaction est la suivante:

$$\frac{\partial I(n_s, z)}{\partial z} \cos\gamma_s = -G(n_s, z) a(z) I(n_s, z) \quad (4)$$

L'émission du milieu est évidemment nulle et l'augmentation de l'intensité due aux réflexions transmissions multiples sera traitée séparément dans l'étude d'un terme complémentaire du rayonnement solaire. La solution de cette équation différentielle linéaire, de premier ordre, sous la condition limite ($z=h; I=I_s(h)$), et utilisant l'angle complémentaire $\theta=\pi-\gamma$, peut être écrite sous la forme

$$I_s(n_s, z) = I_s(n_s, h) e^{-\int_z^h \frac{G(n_s, z) a(z)}{\cos\theta_s} dz} \quad (5)$$

Si l'on considère les cas plus simple où $G(n_s, z)=G(n_s)$, on obtiendra l'atténuation exponentielle classique,

$$I_s(n_s, z) = I_s(n_s, h) e^{-K(\theta_s) A(z)} \quad (6)$$

La fonction $A=A(z)$ représente la densité de surface foliaire cumulée à partir du sommet de la végétation, $A(h)=0$, en accord à l'équation,

$$A(z) = \int_z^h a(z) dz$$

La forme de la fonction $K(\theta)=G(n)/\cos\theta$ est connue pour quelques distributions des normales aux surfaces végétales. Ainsi, on peut expliciter $K(\theta)$ pour les distributions théoriques suivantes:

Aléatoire	$G = \frac{1}{2}$	$K = \frac{1}{2\cos\theta}$
-----------	-------------------	-----------------------------

Horizontale	$G = \cos\theta$	$K = 1$
-------------	------------------	---------

Verticale	$G = \frac{2}{\pi} \sin\theta$	$K = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}\theta$
-----------	--------------------------------	---

inclinaison uniforme θ_0

$\theta + \theta_0 \leq \pi/2$	$G = \cos\theta \cdot \cos\theta_0$	$K_1 = \cos\theta_0$
--------------------------------	-------------------------------------	----------------------

$\theta + \theta_0 > \pi/2$	$G = \frac{2}{\pi} (\cos\theta \cos\theta_0 \cdot \arcsin(\cotg\theta \cotg\theta_0) + \sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\theta_0})$
-----------------------------	---

$K_2 = \frac{2}{\pi} (\cos\theta_0 \arcsin(\cotg\theta \cotg\theta_0) + \sqrt{\frac{\sin^2\theta_0}{\cos^2\theta} - 1})$
--

(La distribution des normales suivant les azimuts dans les deux derniers cas est considérée aléatoire).

Les intensités du rayonnement étant connues, la composition du flux qui arrive sur une référence horizontale est obtenue en intégrant les intensités sur toutes les directions concernées. Pour le cas du rayonnement direct, il existe une seule direction à considérer, et l'éclairement à un niveau z au sein du couvert est donné par l'équation:

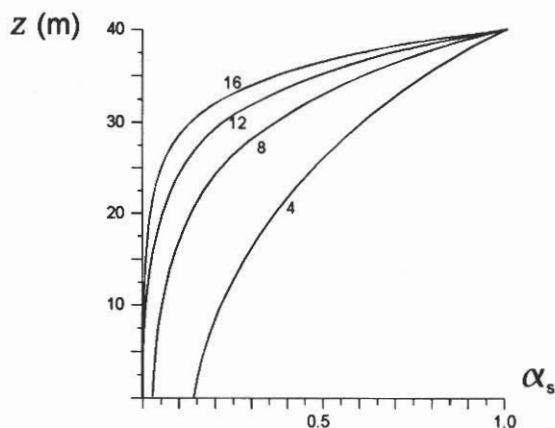
$$F_s(z) = F_s(h) e^{-K(\theta_s) A(z)} = F_s(h) \cdot \alpha_s(z) \quad (7)$$

où,

$$F_s(h) = I_s(n_s, h) \cos\theta_s \quad (8)$$

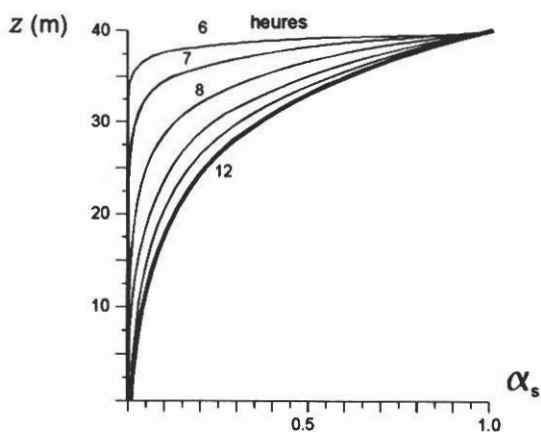
L'analyse des effets des différentes variables qui déterminent la fonction d'atténuation α_s est réalisé, à titre d'exemple pour la forêt équatoriale dense de l'Amazonie (Lat. 3° Sud; mois d'avril). Pour ce type de végétation la distribution aléatoire des normales des surfaces est une hypothèse assez bonne. Ainsi, l'effet de la densité cumulée de surface végétale totale (LAI de l'ensemble végétatif) est présenté (figure 2a) en considérant une distribution constante des surfaces végétales selon la verticale.

Figure 2a – Fonction d'atténuation du rayonnement solaire direct, α_s , en fonction de la hauteur dans le couvert (z), pour différents LAI, en supposant une densité de surface foliaire constante selon la verticale (à 12h).



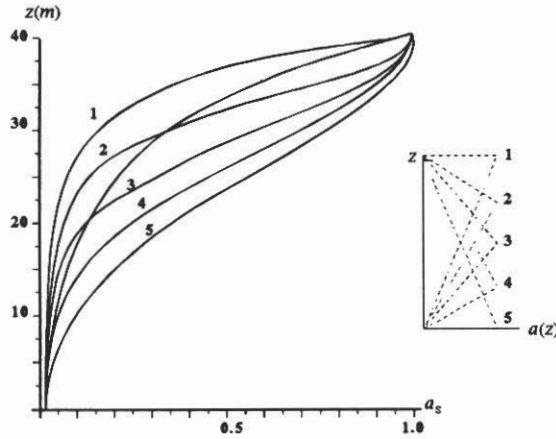
Ensuite, l'évolution horaire de la fonction d'atténuation est illustrée par la figure 2b, encore pour une végétation à densité de surface foliaire constante (LAI=8). L'effet de l'inclinaison du soleil se traduit par de fortes réductions du rayonnement aux heures proches du lever et du coucher du soleil; cette influence disparaît au milieu de la journée lorsque la fonction d'atténuation devient équivalente à celle proposée par MONSI & SAEKI (1953), ce qui correspond à un coefficient d'atténuation K constant.

Figure 2b – Variation journalière de la fonction, α_s , en fonction de la hauteur dans le couvert (z), pour différentes heures de la journée. L'indice foliaire total de la culture est de 8 et le profil de densité de surface foliaire est constant selon la verticale.



Les effets de différentes distributions des surfaces végétales selon la verticale sont montrés schématiquement sur la figure 3, en adoptant diverses formes triangulaires. Les larges différences entre des courbes ainsi obtenues, même pour des distributions assez proches (cas des formes 1, 2, 3), suggèrent que la définition précise de cette distribution, notamment dans la partie haute de la végétation, est un des facteurs prépondérants pour l'obtention d'un profil réaliste du champ de rayonnement solaire direct à l'intérieur du couvert végétal.

Figure 3 – Variations de la fonction d'atténuation, α_s , en fonction de la hauteur dans le couvert (z), pour différents profils de densité de surface foliaire (dont un profil constant: courbe 6), avec le même LAI total de 8 (à 12h).



Le Rayonnement Solaire Diffus

L'étude de la variation du champ de rayonnement diffus au sein d'un couvert végétal comporte certaines analogies avec celle du rayonnement direct. En effet, l'équation différentielle qui gouverne l'évolution de l'intensité est semblable à l'équation 4, la solution étant donnée dans le cas présent par

$$I_d(z) = I_d(h) e^{-\int_z^h \frac{G(n,z) a(z)}{\cos\theta} dz} \quad (9)$$

Le flux total de rayonnement à travers la surface horizontale de référence doit être composé cette fois à partir de l'intégration des intensités données par l'équation 9, sur les différentes directions de l'hémisphère supérieur de la référence horizontale. L'expression qui définit ce flux de rayonnement diffus (éclairage) est donc

$$F_d(z) = \int_{2\pi} I_d(n,z) \cos\theta d\Omega \quad (10)$$

Dans le cas général, l'intensité du rayonnement diffus au-dessus du couvert végétal est une fonction de la direction qui lui est affectée dans l'espace, et l'intégration précédente peut devenir une opération lourde, parfois même non-réalisable de façon explicite. En supposant que la considération d'isotropie du champ extérieur du rayonnement diffus n'entraîne que quelques petites distortions dans le résultat final de l'intégrale 10, il est justifié d'utiliser une telle simplification dans la suite de ce développement. Ceci permet la définition du flux au sommet de la végétation sous la forme: $F_d(h) = \pi I_d(h)$. Ce même flux à une hauteur z à l'intérieur du couvert sera définie par l'équation (azimuths aléatoires):

$$F_d(z) = \int_0^{\pi/2} e^{-K(\theta).A(z)} \cos\theta \sin\theta d\theta = F_d(h) \cdot \alpha_d(z) \quad (11)$$

La fonction d'atténuation α_d se présente sous forme analytique pour quelques cas spéciaux. Les plus importants sont les suivants:

1) Distribution aléatoire des normales

$$\alpha_d(z) = 2 E_3 \left(\frac{A(z)}{2} \right) \quad (12)$$

ou E_n appartient à la famille des intégrales exponentielles, dont la définition générale est la suivante (ABRAMOWITZ & STEGUN, 1970):

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xu}}{u^n} du$$

2) Inclinaison unique θ_0 des surfaces et distribution aléatoire pour les azimuths.

$$\alpha_d(z) = 2 \int_0^{\pi/2-\theta_0} e^{-K_1(\theta).A(z)} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta + 2 \int_{\pi/2-\theta_0}^{\pi/2} e^{-K_2(\theta).A(z)} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta$$

ou,

$$\alpha_d(z) = \cos^2\theta_0 \cdot e^{-\cos\theta_0.A(z)} + 2 \int_{\pi/2-\theta_0}^{\pi/2} e^{-K_2(\theta).A(z)} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta \quad (13)$$

Les cas particuliers des surfaces horizontales et verticales sont déterminés bien évidemment à partir de l'équation 13. En effet, les surfaces horizontales présentent $\theta_0=0$ et les surfaces verticales $\theta_0=\pi/2$, ce qui donne les fonctions d'atténuation particulières suivantes (COWAN, 1968):

- surfaces horizontales: $\alpha_d(z) = e^{-A(z)}$

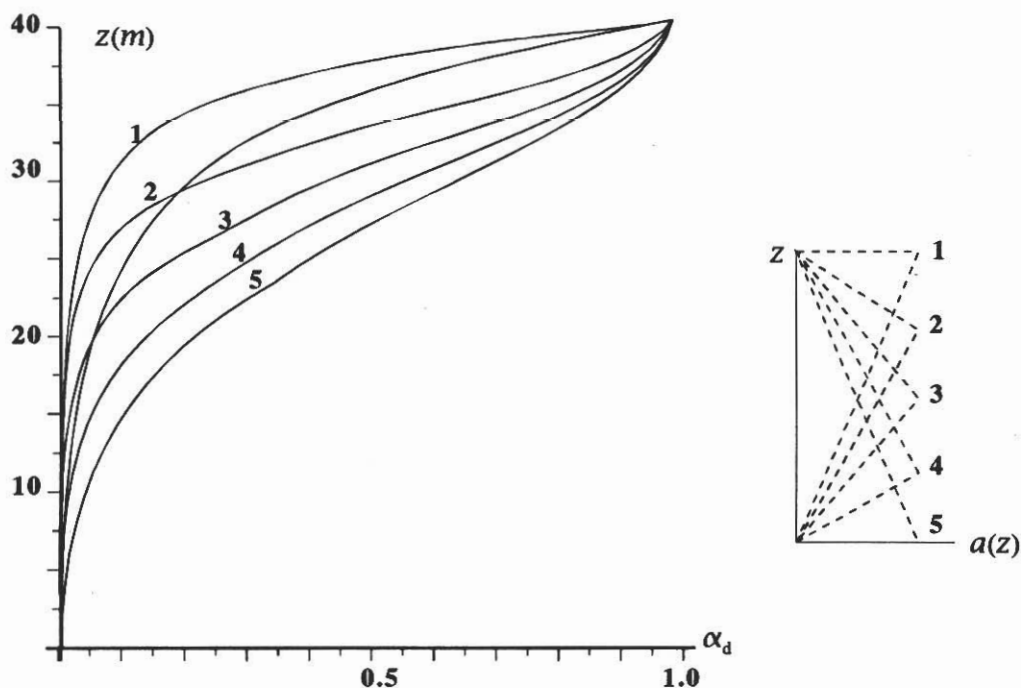
- surfaces verticales:

$$\alpha_d(z) = 1 - \frac{2A(z)}{\pi} \left[\sin\left(\frac{2A(z)}{\pi}\right) \text{Ci}\left(\frac{2A(z)}{\pi}\right) - \cos\left(\frac{2A(z)}{\pi}\right) \text{si}\left(\frac{2A(z)}{\pi}\right) \right]$$

(Ci et si représentent les fonctions cosinus et sinus intégral, respectivement).

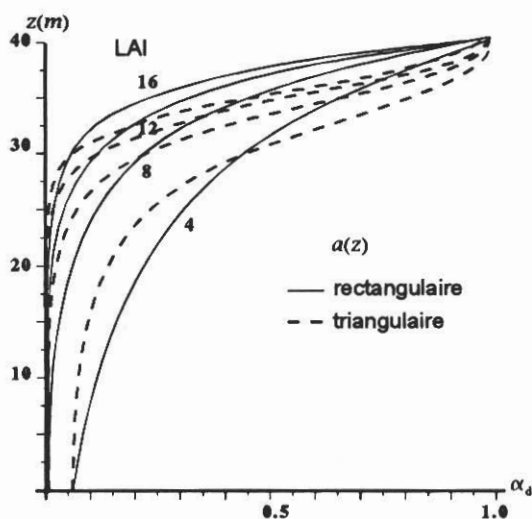
On utilisera l'équation 12, correspondant à la distribution aléatoire des normales, pour calculer quelques exemples de la fonction d'atténuation. Ainsi, la figure 4 illustre cette fonction et sa dépendance par rapport à la forme de distribution des surfaces végétales (forme triangulaire), et notamment par rapport à la position de densité maximale de ces surfaces.

Figure 4 – Variations de la fonction d'atténuation du rayonnement solaire diffus, α_d , en fonction de la hauteur dans le couvert (z), pour différents profils de densité de surface foliaire (dont un profil constant, courbe 6). Le LAI total de la culture est LAI=8



D'autre part l'importance de la quantité totale des surfaces végétales, exprimée par la valeur du LAI du couvert, est représentée dans la figure 5, où sont considérés deux profils de surface foliaire: profils constants et triangulaires. Les fortes différences entre les deux ensembles de courbes apparaissent au sommet du couvert, le flux diffus qui atteint le sol étant toujours très faible.

Figure 5 - Variations de la fonction d'atténuation du rayonnement solaire diffus, α_d , en fonction de la hauteur dans le couvert (z), pour différents LAI et pour deux profils de distribution de la densité de surface foliaire (constant selon la verticale et triangulaire, cf profil 2, figure 4).



Rayonnement Solaire Complémentaire

On définit le champ de rayonnement complémentaire comme étant constitué de tout le rayonnement réfléchi ou transmis par les éléments végétaux, une ou plusieurs fois. Le rayonnement primaire (direct et diffus constituant un premier ordre d'incidence) non-absorbé au niveau d'une surface, donne une contribution de premier ordre au rayonnement complémentaire; cette première réflexion-transmission constitue un rayonnement incident de deuxième ordre, dont la partie réfléchie-transmise représentera une contribution de deuxième ordre au champ complémentaire et ainsi de suite. Ce processus de réflexions-transmissions multiples donnera finalement le champ du rayonnement complémentaire, à condition que tous les ordres d'interaction donnant des contributions significatives à ce champ soient considérés. Mathématiquement, le problème consiste à rechercher les solutions des équations intégrales-différentielles, similaires à celle de l'équation 3, présentée plus haut.

La définition de la fonction de redistribution du rayonnement au sein du couvert joue un rôle décisif pour la description de ce mécanisme de réflexions transmissions multiples; pour cela, il est nécessaire de connaître les coefficients de réflexion et de transmission, R et T, des éléments végétaux, pris individuellement. De plus, il est impératif de réaliser l'intégration des effets de ces surfaces individuelles au sein de l'ensemble végétatif, en considérant la combinaison des caractéristiques optiques avec les fonctions qui expriment les positions relatives des éléments dans l'ensemble. En ce qui concerne l'étude des flux, la séparation en flux descendant et ascendant représente l'approche pour la résolution du problème.

Ainsi, l'équation intégral-différentielle qui exprime la variation des intensités (descendantes ou ascendantes) du rayonnement, à l'intérieur d'une végétation, en fonction de la densité de surface foliaire cumulée $A(z)$, se présente sous la forme (ROSS, 1981; MYNENI ET AL, 1989):

$$\frac{\partial I_k}{\partial A} \cos\theta = G \cdot I_k - \int_{\Omega'_1} \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} I_1(n') d\Omega' - \int_{\Omega'_2} \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} I_2(n') d\Omega' - \int_{\Omega'_1} I_1(n') \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} d\Omega' \quad (14-15)$$

où,

$k = 1$ intensités descendantes; $\pi/2 < \theta < \pi$;

$k = 2$ intensités ascendantes; $0 < \theta < \pi/2$

Les intensités étant définies, on peut déterminer les flux descendant et ascendant par rapport à une surface horizontale, à partir de l'équation:

$$F_k = \int_{\Omega_k} I_k(n) \cos\theta d\Omega \quad k = 1, 2.$$

Une simplification importante à ce problème est obtenue par la supposition d'isotropie du champ de rayonnement complémentaire, pour chacune des composantes (descendantes et ascendantes): cela conduit à des relations simples entre les flux et les intensités, ou:

$$\downarrow F_1 = \pi I_1 \quad ; \quad \uparrow F_2 = \pi I_2$$

Cette dernière hypothèse permet aussi la transformation du système d'équations intégral-différentielles (14-15) à un système classique d'équations différentielles, ayant les flux comme les fonctions inconnues. En effet, les équations (14-15) sont multipliés par un angle solide infinitesimal $d\Omega$, et ensuite intégrées sur les hémisphères correspondant aux intensités descendantes et ascendantes, respectivement. Ces opérations conduisent au système suivant:

$$\frac{\partial F_k}{\partial A} = (-1)^k \left[\frac{F_k}{\pi} \int_{\Omega_k} G d\Omega - \frac{F_1}{\pi} \int_{\Omega_k} \int_{\Omega'_1} \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} d\Omega' d\Omega - \frac{F_2}{\pi} \int_{\Omega_k} \int_{\Omega'_2} \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} d\Omega' d\Omega - \int_{\Omega_k} \int_{\Omega'_1} I_1(n') \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} d\Omega' d\Omega \right]$$

$k = 1, 2.$

En considérant que les deux faces des éléments végétaux présentent des coefficients de réflexion et de transmission égaux ($R_1=R_2=R$; $T_1=T_2=T$), on peut développer les intégrales doubles de ce système, étant donné bien évidemment la forme de la distribution des normales des surfaces végétales. Dans ces conditions, le problème se résume à résoudre le système simplifié suivant:

$$\frac{\partial F_1}{\partial A} = -(U - W_a)F_1 + W_b F_2 + F_{nh1} \quad (16)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial A} = -W_b F_1 + (U - W_a)F_2 - F_{nh2} \quad (17)$$

où, la fonction,

$$U = \int_{\Omega_x} G/\pi d\Omega.$$

Les fonctions F_{nh1} et F_{nh2} sont liées au champ de rayonnement primaire, et elles définissent en partie les formes des solutions particulières F_{p1} et F_{p2} , qui doivent apparaître dans les solutions générales du système. Supposant que ces solutions particulières ont été déterminées au préalable, la solution générale du système sera la suivante:

$$F_1 = C_1 e^{rA} + C_2 e^{-rA} + F_{p1}$$

$$F_2 = \mu C_1 e^{rA} + \frac{1}{\mu} C_2 e^{-rA} + F_{p2}$$

où,

$$r = \sqrt{(U - W_a - W_b)(U + (W_b - W_a))} \quad ; \quad \mu = \frac{U - W_a + r}{W_b}$$

La définition des solutions finales pour les flux F_1 et F_2 passe par la détermination des constantes arbitraires d'intégration, C_1 et C_2 , en imposant des conditions aux limites que chacun de ces flux doit respecter. La plupart des couverts végétaux, les couverts qui présentent un LAI supérieur à 5, admet la supposition des conditions aux limites simplifiées, où l'albedo du sol, R_s , n'intervient pas dans les expressions résultantes. Toutefois, on considère ici le cas général, en faisant intervenir cette caractéristique du sol (R_s), à travers la proposition des conditions aux limites suivantes:

$$z = h \quad A = 0 \quad F_1(A) = 0$$

$$z = 0 \quad A = A_0 \quad F_2(A) = R_s [F(A_0) + F_1(A_0)]$$

où, $F(A_0)$ est le flux de rayonnement primaire au niveau de la surface du sol. En introduisant ces conditions dans la solution générale du système, on peut montrer, après la résolution du système d'équations en C_1 et C_2 , ainsi formé, que les constantes d'intégration sont décrites par les équations:

$$C_1 = \frac{F_{p1}(0) (1/\mu - R_s) e^{-A_0} - F_{p2}(A_0) + R_s [F(A_0) + F_{p1}(A_0)]}{\Phi[\mu, rA_0] - R_s \Phi[1, rA_0]}$$

$$C_2 = - \frac{F_{p1}(0) (\mu - R_s) e^{A_0} - F_{p2}(A_0) + R_s [F(A_0) + F_{p1}(A_0)]}{\Phi[\mu, rA_0] - R_s \Phi[1, rA_0]}$$

où,

$$\Phi[x, y] = x e^y - (1/x) e^{-y}$$

Enfin, la substitution de ces expressions dans la solution générale du système donnera les solutions analytiques qui décrivent les flux pour les conditions limites adoptées. Ces solutions peuvent être présentées sous différentes formes, l'organisation la plus immédiate et intéressante dans le contexte actuel étant la suivante:

$$F_1(A) = F_{p1}(A) - \frac{\Phi[\mu, r(A_0 - A)] - R_s \Phi[1, r(A_0 - A)]}{\Phi[\mu, rA_0] - R_s \Phi[1, rA_0]} F_{p1}(0) - \frac{F_{p2}(A_0) - R_s [F(A_0) + F_{p1}(A_0)]}{\Phi[\mu, rA_0] - R_s \Phi[1, rA_0]} \Phi[1, rA] \quad (18)$$

$$F_2(A) = F_{p2}(A) - \frac{\Phi[1, r(A_0 - A)] - R_s \Phi[1/\mu, r(A_0 - A)]}{\Phi[\mu, rA_0] - R_s \Phi[1, rA_0]} F_{p1}(0) - \frac{F_{p2}(A_0) - R_s [F(A_0) + F_{p1}(A_0)]}{\Phi[\mu, rA_0] - R_s \Phi[1, rA_0]} \Phi[1, rA] \quad (19)$$

Ces formulations (éqs. 18 et 19) sont générales et expriment les flux de rayonnement complémentaire $F_1(A)$ et $F_2(A)$, que ce soit pour la composante directe ou la composante diffuse. Elles reposent sur les deux hypothèses suivantes:

- 1) Isotropie du champ complémentaire pour chaque composante;
- 2) Caractéristiques optiques égales pour les deux faces des éléments végétaux.

Dans ces conditions, toutes les analyses du champ complémentaire, pour les différentes distributions des normales des surfaces, ou même pour d'autres conditions aux limites plus particulières, doivent en fait conduire à des expressions qui sont des cas particuliers des équations 18 et 19. Exemples d'application de cette analyse seront développés par la suite, aussi bien pour le rayonnement complémentaire direct que pour le diffus.

Rayonnement Complémentaire Direct

La spécification des équations appropriées à chaque forme de la distribution des normales des surfaces, suit une séquence d'opérations précises. En effet, les paramètres et les fonctions qui doivent être déterminés en chaque situation sont les suivants:

$$a) \frac{1}{\pi} \int_{\Omega'_1} \int_{\Omega_1} \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} d\Omega d\Omega' = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega'_2} \int_{\Omega_2} \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} d\Omega d\Omega' = W_1$$

$$b) \frac{1}{\pi} \int_{\Omega'_1} \int_{\Omega_2} \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} d\Omega d\Omega' = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega'_2} \int_{\Omega_1} \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} d\Omega d\Omega' = W_2$$

$$c) \frac{1}{\pi} \int_{\Omega'_1} \int_{\Omega_1} I(n') \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} d\Omega d\Omega' = F_s(n_s) \int_{\Omega_1} \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} d\Omega d\Omega' = \frac{W_1^*}{2} \cdot F_s(n_s) = F_{ab1}$$

$$d) \frac{1}{\pi} \int_{\Omega'_1} \int_{\Omega_2} I(n') \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} d\Omega d\Omega' = F_s(n_s) \int_{\Omega_2} \frac{\Gamma(n',n)}{\pi} d\Omega d\Omega' = \frac{W_2^*}{2} \cdot F_s(n_s) = F_{ab2}$$

où,

$$F_s(n_s) = F_s(n_s, 0) \cdot e^{-k(\theta_s) \cdot A} = F_s(0) \cdot \frac{1}{\cos \theta_s} e^{-k(\theta_s) \cdot A}$$

e) Les formes des fonctions particulières, F_{p1} et F_{p2} , sont exprimées de toute évidence par des équations du type:

$$F_{p1}(A) = k_1 \cdot e^{-k(\theta_s) \cdot A} \quad (20)$$

$$F_{p2}(A) = k_2 \cdot e^{-k(\theta_s) \cdot A} \quad (21)$$

où,

$$k_1 = -W_a^* F_s(0) \left[\frac{K(\theta_s) + 1 + \frac{W_b W_b^* - W_a W_a^*}{W_s^*}}{[K^2(\theta_s) - r^2] \cdot 2\cos\theta_s} \right] \quad (22)$$

$$k_2 = -W_b^* F_s(0) \left[\frac{K(\theta_s) - 1 - \frac{W_b W_b^* - W_a W_a^*}{W_s^*}}{[K^2(\theta_s) - r^2] \cdot 2\cos\theta_s} \right] \quad (23)$$

A titre d'exemple, on présente dans le tableau 1 tous les éléments nécessaires au calcul du flux complémentaire direct, pour les trois distributions des normales théoriques suivants: aléatoire, horizontale et verticale. Dans le cas de la distribution verticale, on considère une distribution équiprobable selon les azimuts.

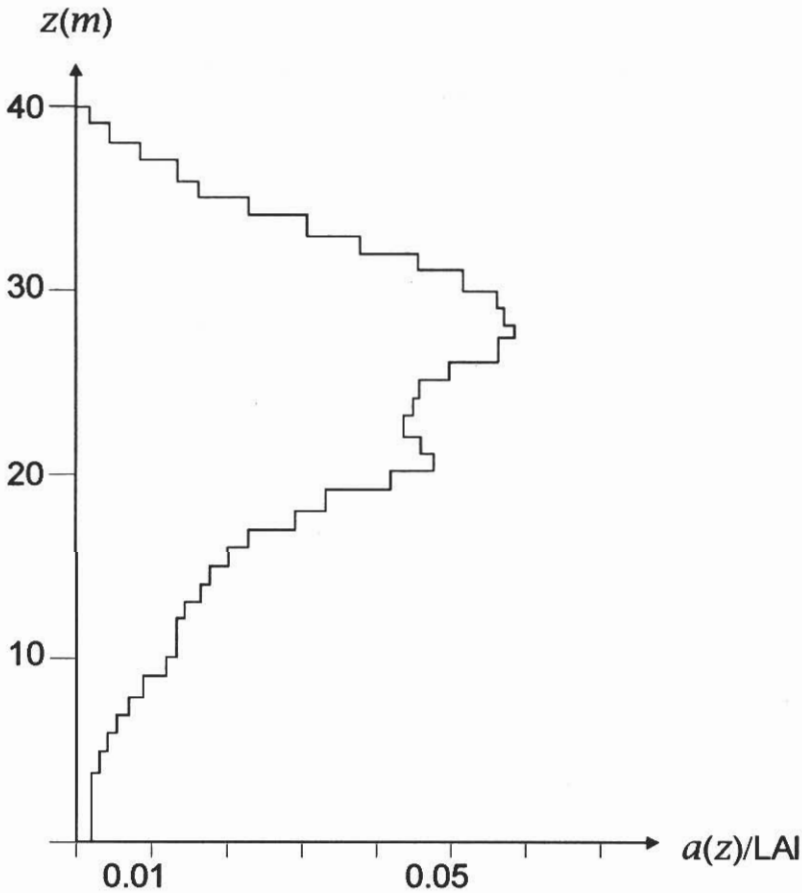
Tableau 1

distribution	$K(\theta_s)$	W_a	W_b	W_s^*	W_b^*
aléatoire	$\frac{1}{2\cos\theta_s}$	$\frac{R+2T}{3}$	$\frac{2R+T}{3}$	$\frac{R+T}{2} - \frac{R-T}{3} \cos\theta_s$	$\frac{R+T}{2} + \frac{R-T}{3} \cos\theta_s$
horizontale	1	T	R	$2T\cos\theta_s$	$2R\cos\theta_s$
verticale	$\frac{2}{\pi} \operatorname{tg}\theta_s$	$\frac{R+T}{2}$	$\frac{R+T}{2}$	$(R+T) \frac{2}{\pi} \sin\theta_s$	$(R+T) \frac{2}{\pi} \sin\theta_s$

Ces exemples et les formulations antérieures qui leur donnent le support, démontrent que dans le contexte du développement présent, l'explicitation de la distribution des normales aux surfaces végétales suffit pour la détermination des flux complémentaires directs, qui sont en fait calculés à partir des équations générales 18 et 19. Que cette distribution soit connue analytiquement ou numériquement, rien n'empêche l'utilisation des solutions générales. En ce qui concerne le cas particulier du rayonnement complémentaire direct, les équations 20 à 23 sont également de validité générale.

Les exemples d'application de cette modélisation du rayonnement complémentaire utilisent les définitions des flux relatifs, α_{s1} et α_{s2} , données par les expressions, $\alpha_{s1,2} = F_{s1,2}(A)/F_s(0)$, et ont été calculés pour la forêt amazonienne (Reserva Florestal Ducke, Manaus - AM; Brésil); lat 3° Sud, mois d'avril) par MARQUES FILHO (1991). La distribution des surfaces végétales selon la verticale considérée dans les calculs, est donnée par la Figure 6, ci-dessous, et la distribution des normales de ces surfaces dans chaque zone au sein de la végétation est considérée aléatoire.

Figure 6 – Densité de surface foliaire de la forêt amazonienne ($a(z)/LAI$)



On a choisi d'abord de représenter l'évolution temporelle de la fonction α_{s1} (associée au flux descendant) et α_{s2} (flux ascendant) pour les valeurs suivantes du coefficient global de redistribution ($W=R+T$): $W = 0,15$ représentant la région du PAR (Figure 7a) et $W = 0,65$, une valeur appropriée pour la région du NIR (Figure 7b).

Figure 7a – Variation journalière des fonctions de production des flux complémentaires descendant et ascendant, α_{s1} et α_{s2} , d0s au rayonnement solaire direct, avec un profil de densité foliaire mesuré, et un coefficient global de redistribution $W=0,15$ et $R=T=0,075$ (cas du PAR).

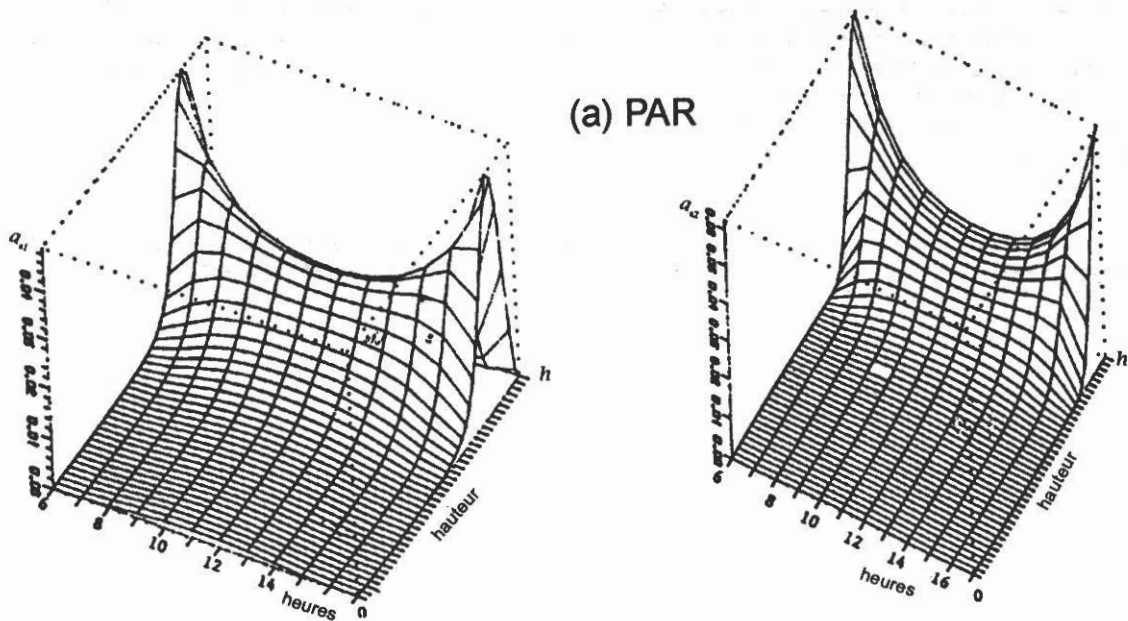
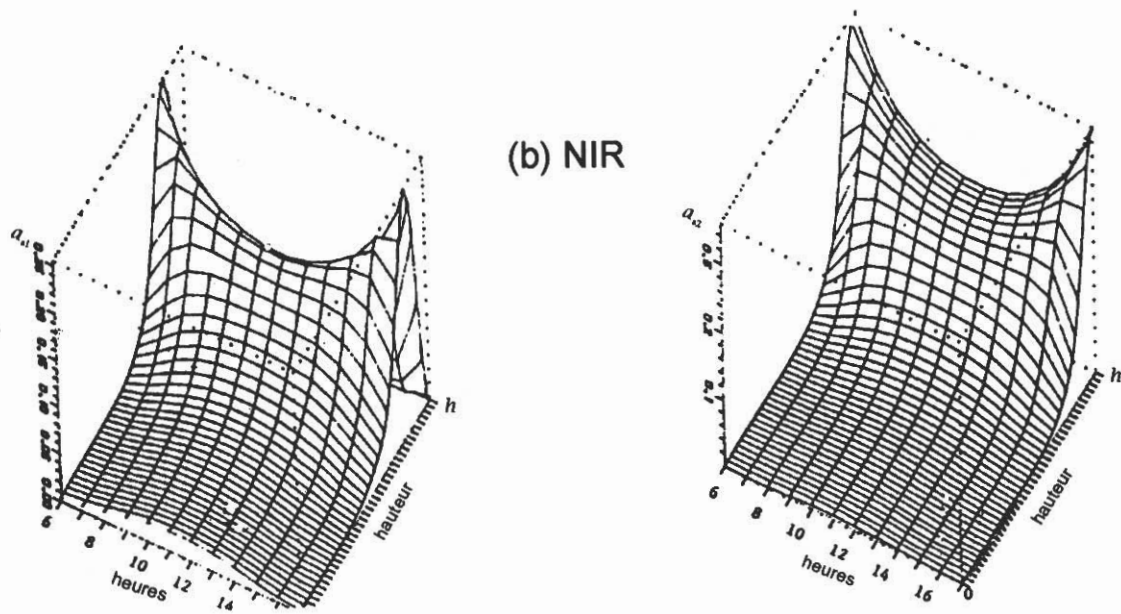


Figure 7b – Variation journalière des fonctions de production des flux complémentaires descendant et ascendant, α_{s1} et α_{s2} , d0s au rayonnement solaire direct, α_{s1} , avec un profil de densité foliaire mesuré, et un coefficient global de redistribution $W=0,65$ et $R=T=0,325$ (cas du NIR).



Les cas présentés précédemment considèrent l'égalité des coefficients R et T . Il est intéressant de développer les fonctions α_{s1} et α_{s2} , pour une situation plus générale, celle où R et T sont différents, pouvant présenter des valeurs numériques quelconques, et de mettre en évidence les effets sur les courbes résultantes dus à cette différence entre la réflexion et la transmission des éléments végétaux. Dans la figure 8 on illustre cette situation à 7 heures du matin (8a) et à 12 heures (8b) pour la forêt amazonienne. D'autre part, les figures 9a et 9b illustrent des diverses combinaisons de valeurs des coefficients R et T , en concentrant cette fois l'attention sur la variation du coefficient global W , et son effet sur le champ complémentaire.

Figure 8a - Variations des fonctions de production des flux complémentaires descendants α_{s1} et ascendants α_{s2} , dûs au rayonnement solaire direct, avec un profil de densité foliaire mesuré, un coefficient global de redistribution égal à 0,5 et différentes valeurs de R et T . Cas de 7h du matin.

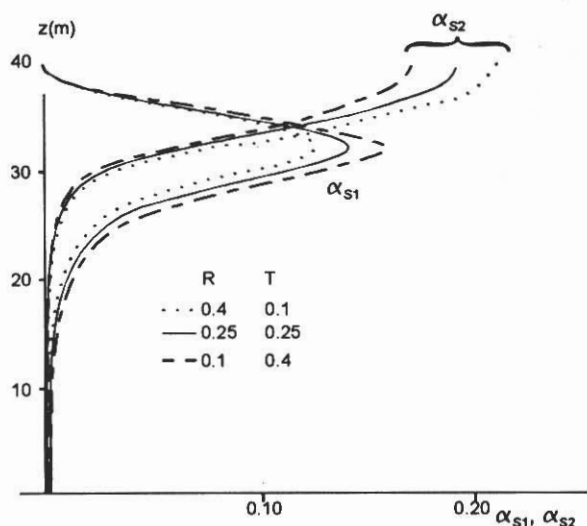


Figure 8b - Variations des fonctions de production des flux complémentaires descendants α_{s1} et ascendants α_{s2} , dûs au rayonnement solaire direct, avec un profil de densité foliaire mesuré, un coefficient global de redistribution égal à 0,5 et différentes valeurs de R et T . Cas de 12h.

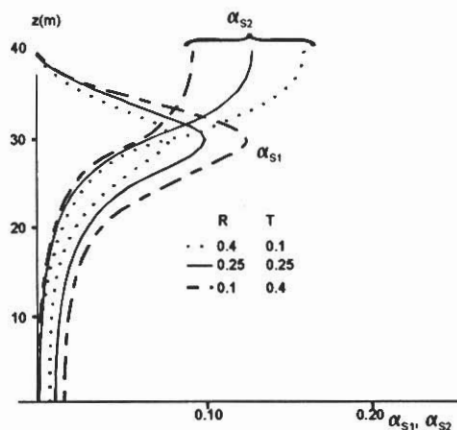
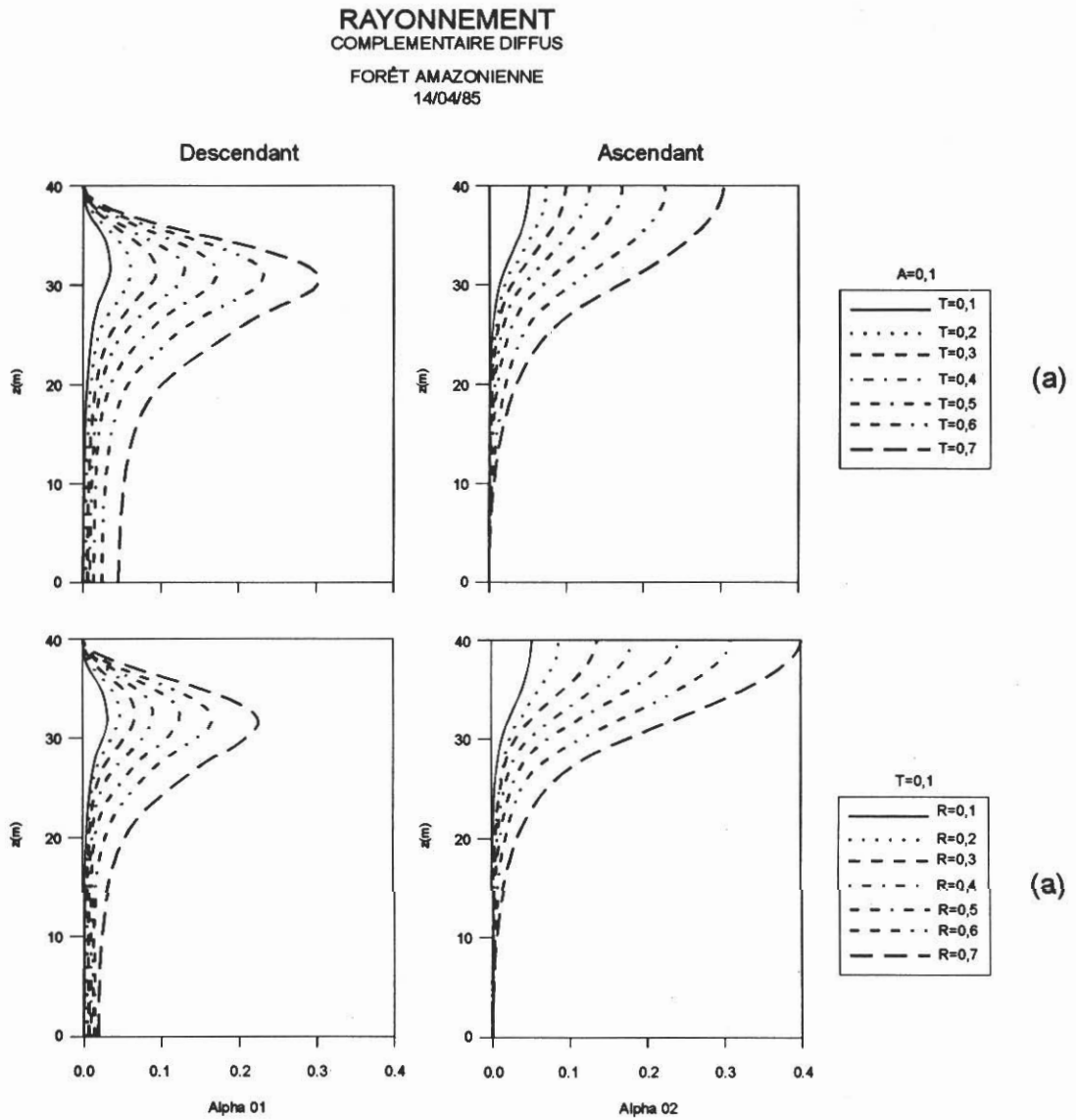
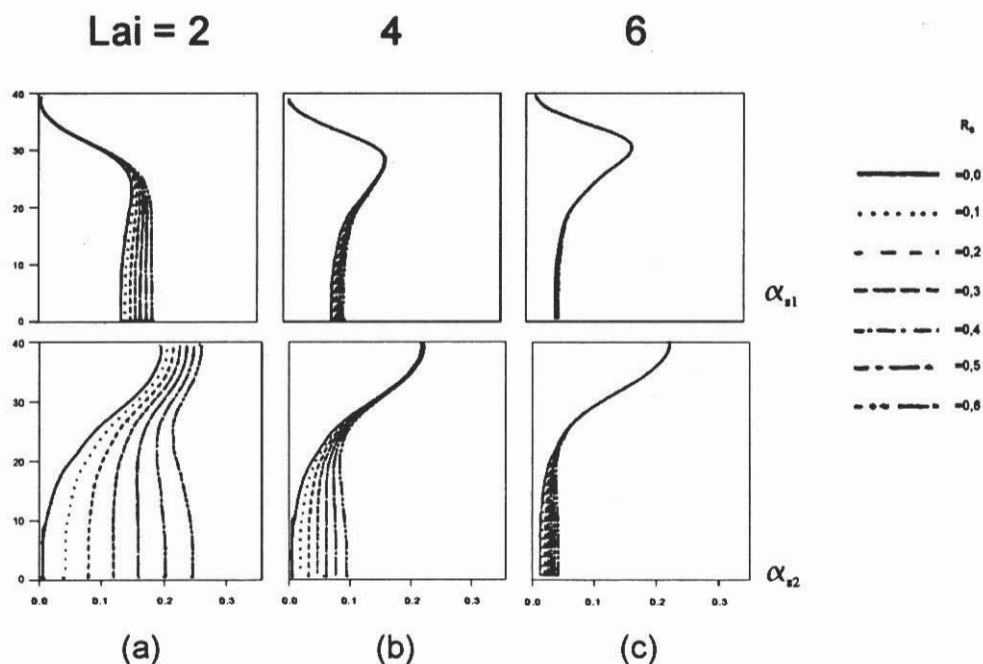


Figure 9 - Variations des fonctions de production des flux complémentaires descendants α_{s1} et ascendants α_{s2} , dues au rayonnement solaire direct, avec un profil de densité foliaire mesuré, un coefficient global de redistribution variable et différentes combinaisons de valeurs de R et T . Cas de 12h.



La forêt amazonienne présente un LAI très élevé (LAI=8), ce qui permet une approche plus simplifiée, puisque dans ces conditions les flux complémentaires sont peu sensibles à la valeur exacte de l'albedo du sol, une valeur nulle constituant une bonne supposition comme première, voire même définitive approximation. Pour mettre en évidence l'exactitude de cette affirmation, on présente les courbes calculées à partir de différentes valeurs de l'albedo du sol, R_s , et aussi pour différentes valeurs du LAI du couvert suivant la correspondance suivante: figure 10a, LAI = 2; figure 10b, LAI = 4; et figure 10c, LAI = 6. Tous les calculs utilisent les valeurs des coefficients $R = 0,3$ et $T = 0,3$.

Figure 10 – Variations des fonctions de production des flux complémentaires descendants α_{s1} et ascendants α_{s2} , dues au rayonnement solaire direct, avec un profil de densité foliaire mesuré, l'albedo du sol R_s et le LAI du couvert variables, $R = T = 0,3$. Cas de 12h.



Rayonnement Complémentaire Diffus

Les fonctions qui caractérisent la non-homogénéité dans le cas du rayonnement complémentaire diffus sont parfois plus compliquées par rapport à celles de la composante direct. Ainsi, on présentera le développement analytique approprié au cas de la distribution aléatoire des normales des surfaces végétales (Marques Filho, 1991). Les fonctions F_{nh1} et F_{nh2} sont décrites par les équations,

$$F_{nh1} = F_d(0) \left[\frac{R+T}{2} E_2 \left(\frac{A}{2} \right) - \frac{R-T}{3} E_3 \left(\frac{A}{2} \right) \right]$$

$$F_{nh2} = F_d(0) \left[\frac{R+T}{2} E_2 \left(\frac{A}{2} \right) + \frac{R-T}{3} E_3 \left(\frac{A}{2} \right) \right]$$

En ce qui concerne les fonctions particulières, F_{p1} et F_{p2} , on peut montrer que les équations qui les définissent dans ces conditions, sont données par,

$$F_{p1}(A) = \sum_{j=1}^3 \left[k_j E_j \left(\frac{A}{2} \right) \right] + k_4 e^{-rA} E_1^* \left[\frac{(1-2r)A}{2} \right] + k_5 e^{rA} E_1 \left[\frac{(1+2r)A}{2} \right] \quad (24)$$

$$F_{p2}(A) = \sum_{j=1}^3 \left[k'_j E_j \left(\frac{A}{2} \right) \right] + k'_4 e^{-rA} E_1^* \left[\frac{(1-2r)A}{2} \right] + k'_5 e^{rA} E_1^* \left[\frac{(1+2r)A}{2} \right] \quad (25)$$

où,

$$k_1 = -k'_1 = \frac{F_d(A=0)}{4} \frac{1-r^2}{r^2} \frac{1}{1+W_b-W_a} \quad (26)$$

$$k_2 = k'_2 = \frac{F_d(A=0)}{2} \frac{1-r^2}{r^2} \quad (27)$$

$$k_3 = -k'_3 = -\frac{F_d(A=0) \cdot (W_b - W_a)}{1 + W_b - W_a} \quad (28)$$

$$k_4 = -\frac{F_d(A=0)}{4} \frac{1-r^2}{r^2} \left[\frac{1+r/(1+W_b-W_a)}{2r} \right] \quad (29)$$

$$k'_4 = -\frac{F_d(A=0)}{4} \frac{1-r^2}{r^2} \left[\frac{1-r/(1+W_b-W_a)}{2r} \right] \quad (30)$$

$$k_5 = \frac{F_d(A=0)}{4} \frac{1-r^2}{r^2} \left[\frac{1-r/(1+W_b-W_a)}{2r} \right] \quad (31)$$

$$k'_5 = \frac{F_d(A=0)}{4} \frac{1-r^2}{r^2} \left[\frac{1+r/(1+W_b-W_a)}{2r} \right] \quad (32)$$

La fonction E_1^* , qui est de la même famille des intégrales exponentielles, est définie par l'équation

$$E_1^*(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$$

et présente des formes particulières selon la valeur de x , à savoir (ABRAMOWITZ & STEGUN, 1970):

$$x > 0 \quad E_1^*(x) = E_1(x)$$

$$x < 0 \quad E_1^*(x) = -E_1(-x)$$

Par ailleurs, la fonction $F_{p1}(0)$ (ou $F_{p2}(0)$) doit être calculée par l'expression suivante:

$$F_1(A=0) = \frac{k_3}{2} + k_2 - k_4 \ln|1-2r| - k_5 \ln(1+2r)$$

puisque $E_2(0)=1$ et $E_3(0)=1/2$.

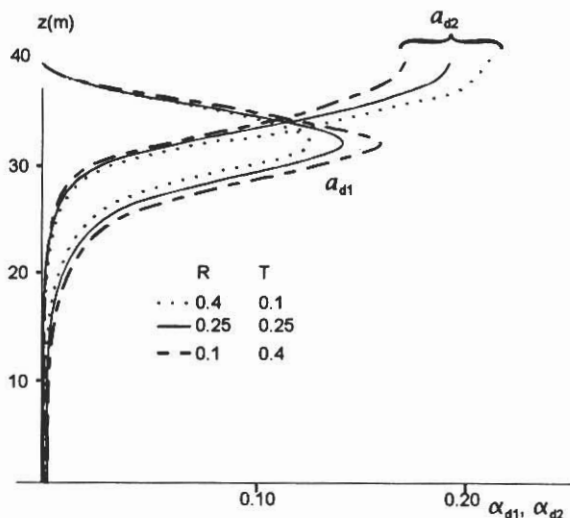
De façon analogue aux fonctions de production du flux complémentaire direct, on peut définir des fonctions équivalentes pour la composante diffuse, à travers les équations:

$$\alpha_{d1}(z) = \frac{F_{d1}(A(z))}{F_d(A(h)=0)}$$

$$\alpha_{d2}(z) = \frac{F_{d2}(A(z))}{F_d(A(h)=0)}$$

Ces deux fonctions et leur dépendance vis à vis des valeurs des coefficients de réflexion et de transmission sont représentées pour la forêt amazonienne. Ainsi, la figure 11 illustre les différences entre les courbes en fonction des diverses valeurs de R et T , et notamment par rapport aux courbes associées à l'hypothèse $R=T$, puisque cette hypothèse est la base de la plupart des solutions analytiques déjà développées.

Figure 11 - Variations des fonctions de production des flux complémentaires descendants α_{d1} et ascendants α_{d2} , dus au rayonnement solaire diffus, avec un profil de densité foliaire mesuré, un coefficient global de redistribution égal à 0,5 et différentes valeurs de R et T .



Enfin, la figure 12 donne une vision plus générale de dépendance des fonctions α_{d1} et α_{d2} à l'égard des différentes combinaisons des coefficients R et T , spécialement en ce qui concerne la valeur globale du coefficient de redistribution W . D'autre part, la figure 13 réune des exemples où les caractéristiques optiques du sol sont considérées, en faisant un tour d'horizon sur les différentes combinaisons des valeurs de l'albedo R_s du sol et du LAI du couvert.

Figure 12 - Variations des fonctions de production des flux complémentaires descendants α_{d1} et ascendants α_{d2} , dues au rayonnement solaire diffus, avec un profil de densité foliaire mesuré, un coefficient global de redistribution variable et différentes combinaisons de valeurs de R et T .

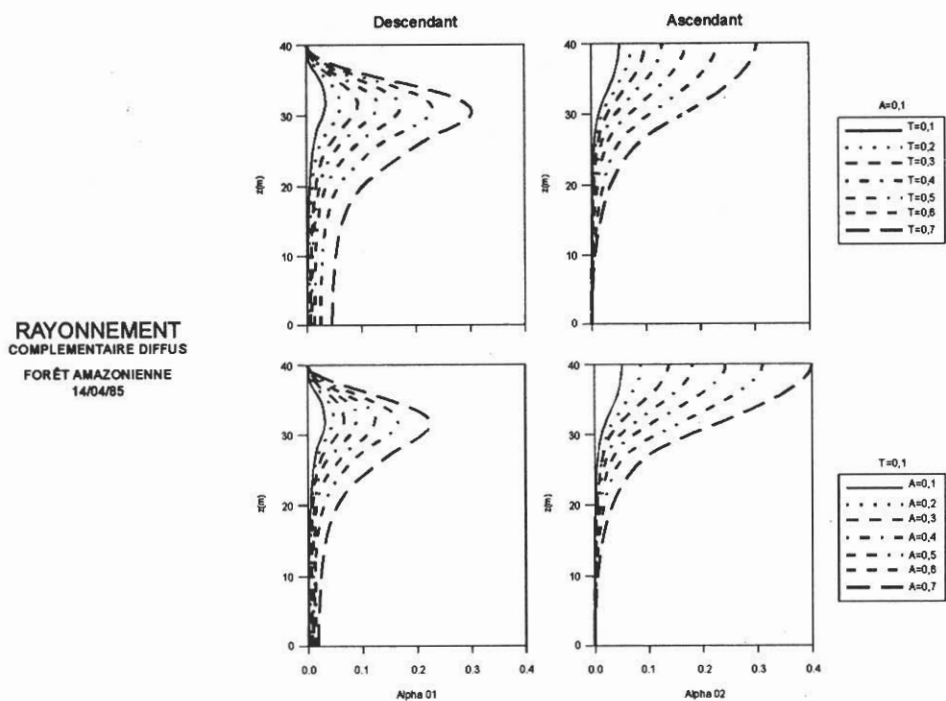
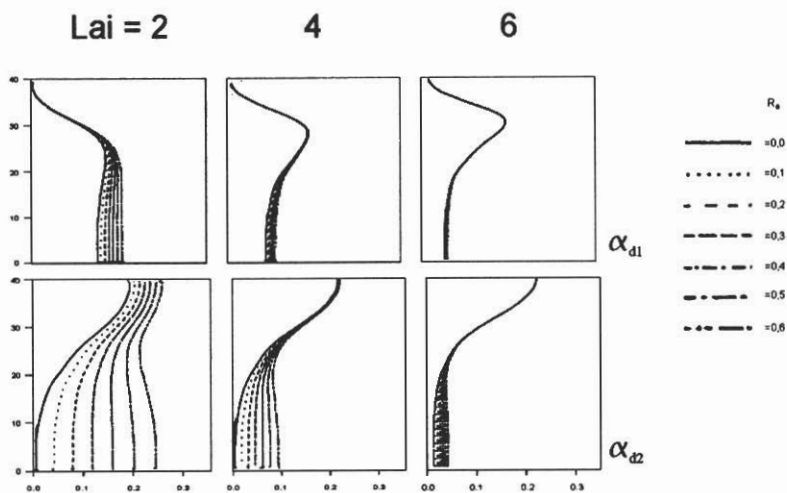


Figure 13 - Variations des fonctions de production des flux complémentaires descendants α_{d1} et ascendants α_{d2} , dues au rayonnement solaire diffus, avec un profil de densité foliaire mesuré, l'albedo du sol R_s et le LAI du couvert variables, $R = T = 0.3$.



CONCLUSION

Cette étude décrit la modélisation mathématique des transferts radiatifs en milieu végétal, en focalisant l'attention sur le régime du rayonnement solaire au sein des couverts végétaux homogènes. Le rayonnement solaire est traité en quatre composantes principales: rayonnement primaire et complémentaire, chacune de ces parties étant constituée des composantes directe et diffuse. On a présenté, dans un contexte assez général, les équations différentielles ou les systèmes d'équations différentielles qui gouvernent les différents processus de l'interaction rayonnement-végétation, et des solutions analytiques sont proposées pour les différentes composantes. Il faut connaître au préalable la forme de la distribution des normales aux surfaces végétales, appropriée à chaque végétation, ceci étant en fait la seule condition pour l'application des formulations ici présentés. En ce qui concerne le rayonnement complémentaire, les solutions finales proposées incorporent les caractéristiques optiques du sol (albedo R_g), ce qui permet l'application de l'ensemble des équations aux différents couverts végétaux, notamment pour les végétations de faible LAI, où l'albedo du sol doit être considéré, si l'on veut obtenir des profils réalistes de rayonnement solaire.

ABSTRACT

The interaction of solar radiation with the vegetation is treated in this work. A mathematical approach is used to describe the primary and complementary solar radiation profiles within the space occupied by the vegetal elements. The generalized solutions for the differential or integro-differential equations defining each term (primary or complementary) are developed. These analytical solutions depend on the optical characteristics of the individual vegetal surfaces and on the function giving the inclination distribution of the elemental vegetal surfaces.

Références Bibliographiques

- ABRAMOWITZ, M., STEGUN, L., 1970 - "A Handbook of Mathematical Functions" - Dover Publications Washington D. C. - 1046 pgs.
- ANDERSON, M.C., 1966 - "Stand Structure and Light Penetration II. A Theoretical Analysis" - Journal of Applied Ecology - 3: 41-54.
- BONHOMME, R. VARLET-GRANCHER, C. 1977 - "Application aux couverts végétaux des lois de rayonnement en milieu diffusant" - Annales Agronomiques 28: 567-582.
- CHARTIER, P., 1966 - "Etude du Microclimat dans la végétation" - Annales Agronomiques - 17: 571-602.
- COWAN, I.R., 1968b - "The interception and absorption of radiation in plant stands" - Journal of Applied Ecology 5: 367-379.

- GOUDRIAAN, J., 1977 - "Crop Micrometeorology a simulation study" - Pudoc Publishing and Documentation, Wageningen, Netherlands, 249pp.
- LEMEUR, R., BLAD, B.L., 1974 - "A Critical Review of Light Models for estimating the Shortwave Radiation Regime of Plant Canopies" Agricultural Meteorology - 14: 255-286.
- MARQUES FILHO, A. O., 1991 - "Bilan énégetique d'une forêt équatoriale - Modélisation mathématique". Thèse Doctorat; 183 p; INAPG, Paris.
- MONSI, M., SAEKI, T., 1953 - "Über Den Lichtfaktor in Den Plazengesellschften Und Seine Bedeutung fur dir Stroffproduction" - Japan Journal Bot. 14: 22-53.
- MYNENI, R. B., ROSS, J., ASRAR, G., 1989 - "A Review on the Theory of Photon Transport in Plant Canopies" - Agricultural and Forest Meteorology 45: 1-153.
- NILSON, T., 1971 - "A theoretical Analysis of the Frequency of Gaps in Plant Stands" - Agricultural Meteorology 8: 25-38.
- PHILIPS, J.R., 1965. "The Distribution of Foliage Density With Foliage Angle Estimated From Inclined Point Quadrant Observations" - Austral. Journal of Botany - 13: 357-366.
- ROSS, J. NILSON, T., 1964 - "The Spatial Orientation of Leaves in Crop Stands and Its Determination" - in "Photosynthesis of Productive Systemes"; Edited by A. A. Nichiporovich; 86-99.
- ROSS, J., 1975 - "Radiative transfer in Plant Communities" - in "Vegetation and Atmosphere" Ed. J. L. Monteith, V.I, Chap. 2.; Academic Press, London.
- ROSS, J., 1981 - "The Radiation Regime and the Architecture of Plant Stands" - Dr W. Junk Publ., The Netherlands.
- VARLET-GRANCHER, C. BONHOMME, R., 1979 - "Application aux couverts végétaux de lois de rayonnement en milieu diffusant" - Annales Agronomiques - 30: 1-26.
- WIT.C.T, 1965 - "Photosynthesis of Leaf Canopies" - Agric. Res. 663, Wasgeningen 57p.

(Aceito para publicação em 23.11.1992)